

Aufgaben zum exponentiellen Wachstum/Zerfall (Teil 2)

Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,033 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdopplungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.

- Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf. Welche Bevölkerungszahlen ergeben sich daraus für die Jahre 1990 und 2000?
- In Europa beträgt die jährliche Wachstumsrate 0,35%, in Afrika 2,94%. Vergleichen Sie die Verdopplungszeiten.

Die Lautstärke

Eine Schallwelle mit der Frequenz 1000 Hz wird vom menschlichen Ohr gerade noch wahrgenommen, wenn sie das Ohr mit einer Intensität der Stärke $I_0 = 10^{-12}$ Watt/m² (Hörschwelle) trifft. Mit zunehmender Schallintensität wächst das menschliche Lautstärkeempfinden glücklicherweise nicht proportional, sondern nur logarithmisch (Weber-Fechner-Gesetz). Die **Lautstärke L** - gemessen in **Phon** - eines Geräusches der **Intensität I** ist definiert durch

$$L = 10 \cdot \lg(I / I_0).$$

- Berechnen Sie die Lautstärke bei der Schallintensität 10^{-6} Watt/m² (normale Unterhaltung) und 10 Watt/m² (Schmerzschwelle).
- Die Geräuschintensität von Disko-Musik ist etwa 10 Milliarden mal so groß wie I_0 . Welcher Phonzahl entspricht das?
- Wie ändert sich die Schallintensität, wenn die Lautstärke um 10 Phon (z. B. von 60 Phon auf 70 Phon) zunimmt?

Radioaktiver Zerfall

Die Atomkerne der radioaktiven Isotope wandeln sich unter Aussendung von radioaktiver Strahlung in Atomkerne eines anderen Elementes um, z. B. Radium in das Edelgas Radon. Betrachten Sie eine bestimmte Menge einer radioaktiven Substanz. Mit N_0 bezeichnen wir die Anzahl der radioaktiven Atome zu Beobachtungsbeginn (Zeitpunkt $t = 0$), mit $N(t)$ die Anzahl der Atome, die bis zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind. $N(t)$ ist exponentiell abnehmend, d. h. $N(t) = a \cdot b^{-t}$ mit $a > 0$ und $b > 1$.

- Zu Beginn der Beobachtung besteht ein radioaktives Präparat aus 10^9 Atomen. Nach 7h 33min sind nur noch 800 Millionen radioaktive Atome vorhanden. Ermitteln Sie das Zerfallsgesetz $t \mapsto N(t)$. Nach welcher Zeit sind 50% (99%) der Atome zerfallen?
- Eine Flasche wird mit einer Flüssigkeit, die radioaktives Jod 131 enthält, gefüllt und verschlossen. Wie viel Prozent der Jodatome sind nach 4 Wochen (einem Jahr) noch vorhanden? Die Halbwertszeit von Jod 131 ist 8d.

Die Bevölkerungszahlen in Städten der Entwicklungsländer sind durch starke Zu- und Abwanderungen gekennzeichnet. Dabei verläuft dieser Vorgang jeweils exponentiell.

Die Bevölkerung der Stadt Paraquito vermehrte sich innerhalb eines Jahres von 20 000 Einwohner auf 23 440 Einwohner, die Stadt Olimpo nahm im gleichen Zeitraum von 80 000 Einwohner auf das 0,86-fache davon ab.

- Stellen Sie für beide Städte jeweils die Wachstums- bzw. Zerfallsformel auf.
- Erstellen Sie jeweils eine Wertetabelle für den Zeitraum 0 bis 7 Jahre.
- Stellen Sie die exponentielle Zu- bzw. Abnahme zeichnerisch dar.
- Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der beiden Kurven?
- Berechnen Sie, wann die beiden Städte gleiche Einwohnerzahlen haben.

Altersbestimmung mit radioaktivem Kohlenstoff 12

In der Atmosphäre kommt neben dem stabilen Kohlenstoffisotop ¹²C in sehr geringer Konzentration das radioaktive Isotop ¹⁴C vor. Dieses Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Die Konzentration von ¹⁴C in der Atmosphäre bleibt gleich, weil es durch die kosmische Strahlung ständig neu gebildet wird.

Pflanzen nehmen ständig Kohlenstoffdioxid CO₂ aus der Luft auf und bauen den Kohlenstoff in ihr Gewebe ein. Dabei gelangt auch der radioaktive Kohlenstoff ¹⁴C in das Gewebe, und zwar entsprechend seinem Anteil am atmosphärischen Kohlenstoff.

Nach dem Absterben der Pflanzen hört die Aufnahme von Kohlenstoff auf. Von diesem Augenblick an verringert sich die Menge des Isotops ¹⁴C, die in der Pflanze enthalten ist.

- Bei Ausgrabungen wurden Holzreste entdeckt, die nur noch den Anteil p ($0 < p < 1$) des Kohlenstoffs ¹⁴C enthalten, der in einem lebenden Stück Holz vorhanden ist.

Leiten Sie folgende Regel her:

$$\text{Alter des Fundes} \approx (\lg(p) / \lg(0,5)) \cdot 5730 \text{ Jahre}.$$

- In einem Pharaonengrab fand man einen Balken aus Zypressenholz, in dem der ¹⁴C-Anteil nur noch 56% des ursprünglichen Anteils ausmachte. Berechnen Sie das Alter.
- Über Nahrungsketten gelangt der radioaktive Kohlenstoff auch in tierisches Gewebe. Bestimmen Sie das Alter eines Knochens, in dem der ¹⁴C-Anteil nur noch 73,9% des ursprünglichen Anteils ausmacht.